

波散射探討：從相圖到量子隱形斗篷

國立清華大學光電工程研究所 李政誼 李瑞光

一、前言

散射是所有波動物理的共通現象，探討一個散射體對於外在刺激源(external stimuli)所產生的反應：散射場(scattered field)。有關的議題可說上天下海，天空為什麼是藍色、雷達偵測、奈米光學、隱形斗篷(invisible cloak)、半導體載子散射(carriers scattering)到核子物理探索基本粒子對撞等等。即使物理系統不同，但是其內涵的波散射概念大可互通。

電磁散射的理論奠基於一百年前，由德國物理學家古斯塔夫·米(Gustav Mie)所於1908年提出，也稱為米式散射(Mie theory) [1]。米式散射是精確的電磁解，圓球散射物對於任何頻率的平面波的全場電磁場解析，任何電磁物體成份；介電常數(Permittivity)和磁導率(Permeability)都可帶入其方程式畫出電磁場。小散射體，也就是其散射體特徵長度遠小於外來電磁波長，一種簡化的理論稱為瑞利散射(Rayleigh scattering)，由偶極子理論(Dipole radiation)推導而來，但該理論僅能處理一般微小散射的輻射行為，對於異常光散射(anomalous scattering)如光與散射體的耦合共振無法適用，著名的例子是奈米局域表面電漿共振(localized surface plasmon mode)，運用金或銀奈米粒子(約五十奈米以下)在可見光頻譜下可產生強烈的光散射[2]。這類的結構搭配一些負介電常數，如貴金屬，能夠產生特別的光波場，是當前很熱門的研究。更小尺度的物理，薛丁格方程式描述量子粒子的運動，如電子在半導體運動行為也格外受到重視。這部分重要的問題是如何設計超高遷移的電子，降低電子在運動中遇到雜質的散射。最近，利用電磁隱形斗篷的概念可運用到這方面，使得電子散射截面(scattering cross section)降低，可說相當吸引人的[3]。

本文的第一部分，想從不同角度探討目前已發表的電磁奇異散射體(anomalous scatterers)。我們近期研究發現存在一張相圖可將所有被動元

件的散射場反應都涵括在內，因此，對於散射過程中的能量分配，甚至散射極限，都可以明白顯示[4]。

第二部份，我們提出全新的量子隱形斗篷設計[5]。引入全反射概念在斗篷內層，因此可將進入內部的場大幅降低，同時外部的散射場也能夠消除，結合變換光學、消除散射場法(scattering cancellation method)兩種隱形斗篷的優點。

二、相圖

不管是電磁或者是量子，甚至聲波物理系統，對於求解散射場方式，均有共通性。首先將外在刺激源(通常假定為平面波，此分析不失一般性)表示成球座標的球諧函數(spherical harmonic functions)，這是波動方程式亥姆霍茲方程(Helmholtz equation)在球座標的基底，只要運用一些技巧就可以將這些函數的係數找出。對於球型的散射體，產生的散射場(scattering field)使用球諧第一類漢克爾函數(其物理意義為球型波傳播出去)並搭配適當的係數來表示這個場，此係數稱為散射係數(scattering coefficient)。假設環境的介質是非吸收物質，且沒有自由電荷和電流(no free charges and currents)。找出散射參數以適當邊界條件來找出。以電磁學來說，一般情況是，表面沒有電荷或表面電流(source charge or current)，則為電場、磁場連續。當然，也可以考量其他邊界條件，如有表面電荷、表面電流。而量子方面的條件為，波函數連續與機率波沿著垂直球方向守恆。

除了求出散射係數外，定義三個重要物理量：散射截面(scattering cross section, σ_{scat})、吸收截面(absorption cross section, σ_{abs})與消光截面(extinction cross section, σ_{ext}) [6]。這三個截面，都是在遠場情況下，藉由封閉表面積分而來。外在刺激源與散射場構成外在環境中構成全部的場，藉由疊加原理(principle of superposition)，可

計算流(flow)在封閉球面的總合，此為吸收截面(absorption cross section)。單獨計算散射流量(flux of scattering waves)，稱為散射截面(scattering cross section)；隱形斗篷的目標就是要使散射截面為零。消光截面(extinction cross section)與光學原理(optical theorem)有關，若是沒有散射體，則在刺激源的方向接收的能量就是刺激源的強度，散射體的出現會將一些能量藉由干涉或是散射體能量吸收而使接收的能量變不同，此為消光截面。另一種說法認為此截面就是影子(shadow)，只有隱形斗篷的條件才能達到無影子的存在。

這三種截面在電磁學的表示為[6]：

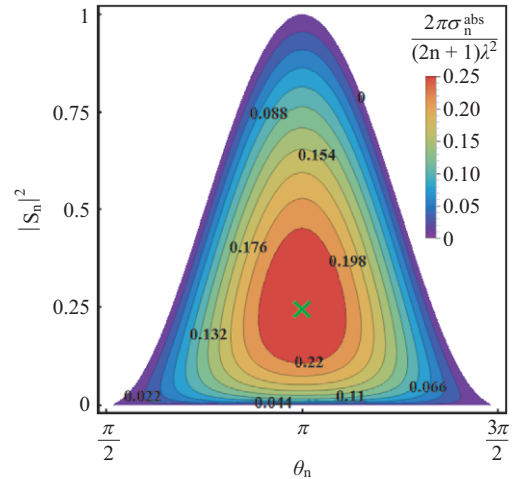
$$\sigma_{ext} = \sigma_{abs} + \sigma_{scat},$$

$$\sigma_{ext} = -\frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} (2n+1) \text{Re}[S_n^{TE} + S_n^{TM}],$$

$$\sigma_{scat} = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} (2n+1) (|S_n^{TE}|^2 + |S_n^{TM}|^2)$$

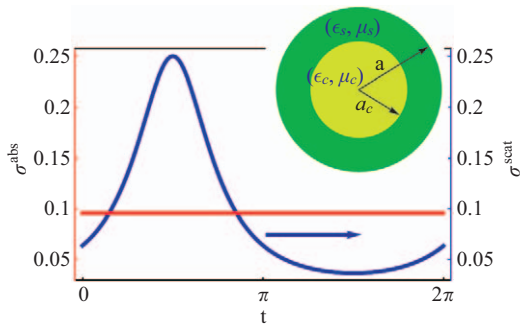
其中， λ 為外在刺激源的波長， S_n^{TE} 和 S_n^{TM} 既為散射參數，TE 和 TM 是為橫向電場(Transverse electric)和橫向磁場(Transverse magnetic)。這三種截面是由可收斂的無窮級數所表示，決定主要的貢獻項(多少 n 項是重要的)可由 $k_0 a$ 判斷， k_0 是外在刺激源的波數， a 是散射體的大小。在奈米光學尺度，通常 $k_0 a < 1$ ；可見光約 300 nm 到 700 nm，奈米粒子約 30 nm 左右，因此光散射的特性主要由 $n = 1$ 決定，即為偶極子項(Dipole term)。上述的公式用於電磁領域，但在量子、聲波等波動物理，可看到幾乎一樣的截面公式[7]。

如果將吸收截面(absorption cross section, σ_{abs})重新繪製等高線圖，並且由於能量守恆原理，需要求 $\sigma_{abs} \geq 0$ ，如圖一所示。因此，這代表，對於散射係數(S_n^{TE} 和 S_n^{TM})，也就是決定整個外場散射表徵，是具有邊界的。有趣的是，這張圖的存在並不用先將散射體的結構、成份決定，甚至還沒有去推導散射係數的數學公式，我們只是單純從能量守恆原理去反推可能散射係數邊界。從這張圖也可看到完整的能量分配，例如，當 $S_n = 1$, $\theta_n = \pi$ 則散射截面最強，但是，這樣的散射體需要為沒有耗損的物質(lossless



圖一 散射相圖， S_n 為散射參數的振幅， θ_n 為相位。顏色區塊為被動式散射體所有的物理散射係數的解(allowable solutions)。白色區域表示增益能量；被動式原件不可能有的散射參數。來自文獻[4]。

media)。文獻[8, 9]的工作就是在探討該用如何物質能夠奈米光學次波長尺度下達到這樣強散射，也稱為局域表面電漿共振(localized surface plasmon resonance)，可運用於生物感測器、近場成像、增強能源效能等廣大運用。如果散射體為無耗損物質，如像圖中，則振幅 S_n 與相位 θ_n 是被束縛在紫色邊界上，這結果的有趣又震撼的地方在於，任何結構的非消耗散射體(指包覆多少層的球形物體)，複雜的散射的行為都只是對應這樣的簡單關係。另外，對於每個頻道(也就是每個 n)，能量吸收最強為 $S_n = \frac{1}{2}$, $\theta_n = \pi$ (綠色叉表示)，而其對應的散射能量也是與吸收能量相同。文獻[10]主要探討這種結構，它能夠吸收體吸收最大的能量，可用於能源奈米粒子上，此種結構也稱為完美相干吸收體(perfect coherent absorber)，這是因為如果以球面波的觀點來看，此條件是入射的球面波(incoming)都被完全吸收。相圖也指出，對於強散射表現並不同於高能量吸收，在相同的等高線，可同時有兩種不能的光散射能量分配，所以，經由適當設計，可以發展出一種對環境沒有太大擾動的散射體，同時吸收外在的能量，尤其在相位為 π ：盡可能降低散射強度，但是也盡可能吸收最佳的能量。另外，隱形斗篷的目標，即是散射振幅為零，也一樣能



圖二 吸收截面和散射截面；經由像圖來控制吸收和散射截面。插圖：我們所分析的球殼結構參數。來自文獻[4]。

夠呈現在相圖上表示。

如果能控制散射係數的特徵狀態(extrinsic states)，那麼光場就可被控制。散射係數 S_n 可表示為：

$$S_n = -\frac{1}{1 + i \frac{V_n}{U_n}},$$

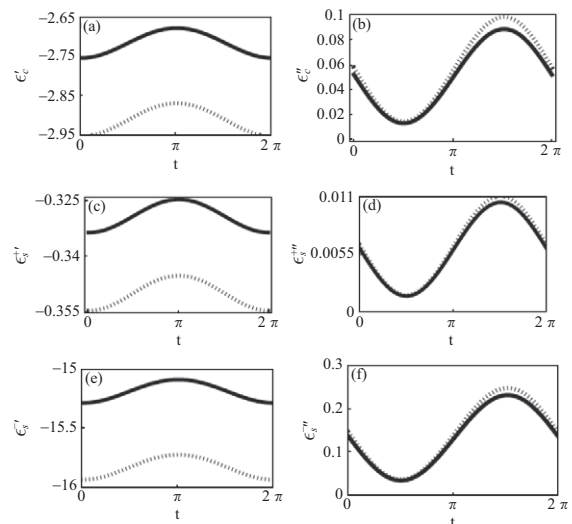
這裡， V_n 和 U_n 為兩個行列式，由幾何大小、層數、材料參數來決定。我們先行決定相圖的路徑，再反推回去找出設計這種散射體所需的材料參數。如圖二，我們以球殼結構來驗證我們的概念；完整的細節技術，感興趣的讀者可參考文獻[4]。

圖三，是我們此以概念所找出的對應材料參數。因此，這表示藉由這些參數我們可調控散射場。

三、量子隱形斗篷

有兩種方法可達到量子隱形斗篷，一為變換光學(Transformation optics)，但是在內部斗篷的等效質量需為無窮大，而且對應的位能結構也相當複雜，儘管這樣的設計方法就是完美的隱形斗篷，並且可屏蔽內部免受外場干擾，但在實驗上很難達成[11-13]。

另一種方法是消除散射場(scattering cancellation method)，這種方法是目前技術上最可行也最簡單的，只需要各向同性的球殼結構，就可以大幅降低散射場，即為隱形。但最大問題在於，此為透明型隱形斗篷，場會穿透進去，無



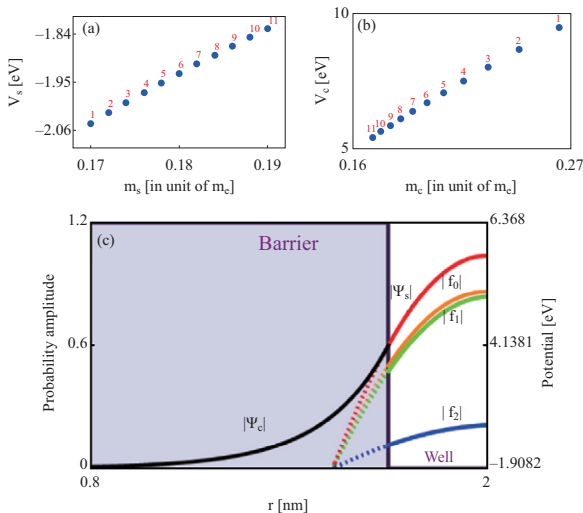
圖三 材料參數；對應圖二的選擇路徑下的結果。實線是解析近似解，來自偶極子項近似(dipole approximation)。虛線是米式散射精確解。來自文獻[4]。

法隔絕內部與環境場的交互作用[3, 7]。

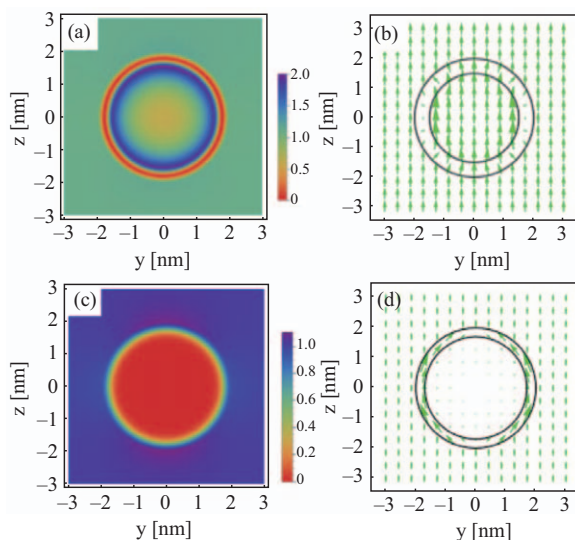
我們提出不同於變換光學和傳統散射消除法，可進一步讓隱藏內部達到可能。描述球形散射，我們採用分波分析(partial wave analysis)，方法與解電磁學雷同。對於球殼量子結構，首先，我們假設存在一組解可使散射截面為零，藉由邊界條件可推得近似的量子散射係數，並且只與兩個參數有關：殼的等校質量和位能(shell's m_s 和 V_s)。由於分波(partial wave)對於殼層的基底為第一類與第二類球漢克爾函數(Spherical Hankel function)，它們的物理意義為球形波的傳出與傳入，並且具有相同振幅；這表示對於每個殼層的分波頻道(channel)，他們能夠形成駐波。利用這點特性，因此我們試著調整殼的等校質量和位能，讓主要的分波頻道能夠在給定的徑向位置處(radial position)產生結點(nodal point)。這樣的觀念與解平面波打入平面所產生的全反射(total internal reflection)古斯－漢欣位移(Goos-Hänchen shift)雷同。另一個條件是我們計算物質流進入殼層的總量，如果需要將內部隱藏，經由物質波流量守恆的原理，因此流入殼層的流速會高以補償內部流量幾近為零的隱形斗篷。

經由上述兩條件，因此就推算出殼的等校質量和位能[5]。

散射係數在球殼結構是與四個參數有關，兩



圖四 (a)、(b)滿足全反射條件和消除 s 波、p 波的解。(c)為分波振幅，具有共同結點。來自文獻[5]。



圖五 機率振幅與機率流。(a)、(b)帶入文獻[3]的材料參數。(c)、(d)來自文獻[5]的材料參數。

參數為殼的等校質量和位能，另外兩參數為核層的等校質量和位能 (core's m_c 和 V_c)。因此，剩下未決定的核層參數，我們用來決定是主要散射貢獻場 s 波和 p 波頻道為零。圖四(a)、(b)為滿足這四個條件的解，(c)為分波沿著徑向的振幅，藉由全反射原理，可將內部的物質波大幅降低。圖

五，為機率振幅和機率流場。藉由我們的提出的概念，可將內部的機率振幅大幅降低並且同時散射場幾乎為零。我們也發現，在隱藏內部使用任何材料參數都不會改變散射截面，這表示，我們可以隱藏任何物質於內。

四、結論

我們提出全新的圖像是概念，可供近年熱門的奈米光科學在設計被動式散射體控制光場和能量分配。其他的物理系統也有這樣的結果，我們目前正在撰寫其論文。我們所提出的全新量子隱形斗篷，其材料參數有機會以目前半導體技術來實現。藉由簡單的球殼結構，達到隱形又隱藏內部，可提供未來設計新的電子元件。

參考文獻

- [1] G. Mie, *Annal. Phys.*, **330**, 377 (1908).
- [2] S. A. Maier, "Plasmonics: fundamentals and applications," (Springer, 2007).
- [3] B. L. Liao, M. Zabarjadi, K. Esfarjani and G. Chen, *Phys. Rev. Lett.*, **109**, 126806 (2012).
- [4] J. Y. Lee and R.-K. Lee, arxiv.org/pdf/1505.06403.
- [5] J. Y. Lee and R.-K. Lee, *Phys. Rev.*, **B89**, 155425 (2014)
- [6] C. F. Bohren and D. R. Huffman, "Absorption and Scattering of Light by Small Particles," (Wiley, New York, 1983)
- [7] R. Fleury and A. Alu, *Phys. Rev.*, **B87**, 045423 (2013).
- [8] M. I. Tribelsky and B. S. Lukyanchuk, *Phys. Rev. Lett.*, **97**, 263902 (2006).
- [9] A. Alu and N. Engheta, *J. Appl. Phys.*, **97**, 094310 (2005).
- [10] H. Noh, Y. Chong, A. D. Stone, and H. Cao, *Phys. Rev. Lett.*, **108**, 186805 (2012).
- [11] S. Zhang, D. A. Genov, C. Sun and X. Zhang, *Phys. Rev. Lett.*, **100**, 123002 (2008).
- [12] D. H. Lin, *Phys. Rev.*, **A81**, 063640 (2010).
- [13] D. H. Lin, *Phys. Rev.*, **A85**, 053605 (2012).